LOIS GENERALES

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

Nous étudions en 1ère année les circuits électriques dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi-Permanents (ARQP), dite aussi Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARSQ) : cette approximation consiste à <u>négliger les phénomènes de propagation</u> d'ondes électriques le long des circuits étudiés. On montre que cela consiste à supposer :

$$\boxed{l \ll \lambda}$$

$$\begin{cases} l \text{ : ordre de grandeur de la dimension du circuit} \\ \lambda = cT\text{, T temps caractéristique des phénomènes variables étudiés.} \end{cases}$$

<u>A.N.</u> : $l \sim 1 \text{ m} \Rightarrow \lambda \gg 1 \text{ m}$

$$\Rightarrow f \ll 3\ 10^8 \text{ Hz} \qquad \left(\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{c}{f} \\ c = 3\ 10^8 \text{ms}^{-1} \end{array}\right)$$

On voit donc que pour ces circuits électriques de dimension $l \sim 1$ m, on pourra travailler sans problème jusqu'à des fréquences de l'ordre du mégahertz.

I. Conducteurs ohmiques – Loi d'Ohm.

I.1. **Loi d'Ohm locale :** un conducteur électrique est constitué de « porteurs de charges » mobiles sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$.

Dans le cadre de ce cours, nous prendrons comme seul exemple de conducteur le métal. Un métal sera modélisé par une matrice d'ions fixes aux nœuds d'un réseau cristallin, et des électrons de charge (-e), « mobiles ». Ces électrons sont en mouvement incessant et désordonné « d'agitation thermique » ; appelons $\vec{v}$ la vitesse du <u>mouvement d'ensemble</u> des électrons sous l'action de $\vec{E}$ (vitesse « moyenne »).

Ces électrons subissent des chocs, entre eux et sur le réseau cristallin, qui gênent le mouvement d'ensemble, ce que l'on peut modéliser par une force de frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$, si $\tau \approx 10^{-14}$s à température ordinaire est le temps moyen entre 2 chocs, et m la masse d'un électron (modèle de Drude).

Appliquons la RFD à un électron :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

Rem. : si $\vec{E}$ est non permanent, il apparaît aussi un champ magnétique.

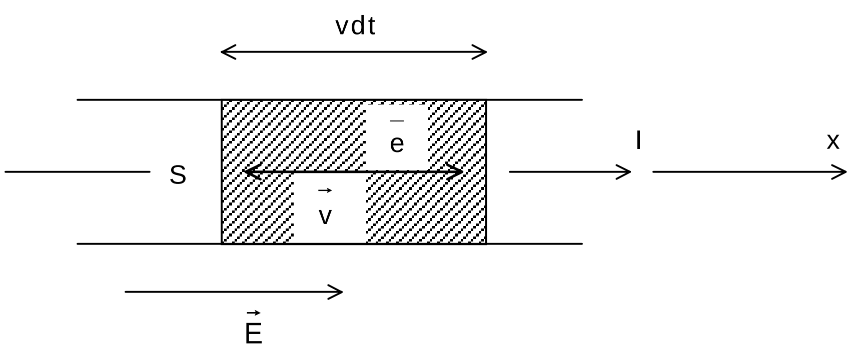
Nous nous limiterons donc d'abord au cas simple du régime permanent.

Alors :

$$\vec{O} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

$\Rightarrow \quad \vec{v} = -\frac{\tau e}{m}\vec{E}$: les électrons acquièrent une vitesse colinéaire et de sens opposé à $\vec{E}$.

Considérons alors un cylindre (fil électrique) de section S :



Soit n le nombre volumique d'électrons de conduction :

$dN = n\ (S\ vdt)$ est le nombre d'électrons traversant S pendant dt.

La charge (en valeur absolue) traversant S pendant dt est donc :

$$dQ = S\ (nev)\ dt$$

L'intensité à travers S est alors :

$$I = \frac{dQ}{dt} = S\ (nev)$$

(orientée dans le sens conventionnel).

On peut donc poser :

$$\underline{I = \vec{j}\,.\,\vec{S}}\ , \quad \text{si :}$$

$$\begin{cases} \vec{j} = -\,ne\,\vec{v} \\ \vec{S} = S\,\vec{x} \end{cases}$$

$\vec{j}$ est appelé vecteur <u>densité volumique de courant</u> : il s'exprime en <u>Am^{-2}</u>, et l'intensité à travers S est le <u>flux</u> $\vec{j}$ à travers cette surface.

En combinant les deux relations :

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{\tau e}{m}\vec{E}\ , \\ \vec{j} = -\,ne\,\vec{v} \end{cases} \qquad \text{on obtient}$$

La loi d'Ohm locale, traduisant la proportionnalité de $\vec{j}$ et $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{j} = \left(\frac{ne^2\tau}{m}\right)\vec{E} = \gamma\,\vec{E}} \qquad \text{où}$$

γ est appelé <u>conductivité</u> du matériau (unité : Sm^{-1} ou $\Omega^{-1}m^{-1}$)

<u>AN</u>. : Pour un métal (solide) : $10^{-30}m^3$ est l'ordre de grandeur du volume d'un atome.

Donc
$$\begin{cases} n \approx 10^{29}m^{-3} \\ \tau \approx 10^{-14}s \\ e = 1{,}6 \times 10^{19} \\ m \approx 10^{-30}\ kg \end{cases} \quad : \quad \underline{\gamma \approx 10^{7}\Omega^{-1}m^{-1}}$$

(Les métaux sont évidemment de très bons conducteurs électriques).

<u>Rem.</u> : * si T augmente, l'agitation thermique augmente, τ diminue, donc γ également ($n \approx$ cste).

* On pose aussi $\rho = \dfrac{1}{\gamma}$, résistivité du matériau (en Ωm) $\Rightarrow \vec{E} = \rho\,\vec{j}$

<u>Généralisations</u> :

* En présence de $\vec{B}$ permanent, $\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$ n'est en toute rigueur plus valable : c'est « l'effet Hall » ; on montre que cet effet est négligeable dans les métaux.

(Les « sondes à effet Hall », teslamètres, sont constituées de semi-conducteurs).

* En régime non permanent, on montre que $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ reste valable si $\vec{E}$ ne varie « pas trop vite », plus précisément si :

$$T >> \tau \quad , \quad \text{ou} \quad \omega << \frac{1}{\tau} \sim 10^{+14} s^{-1}$$

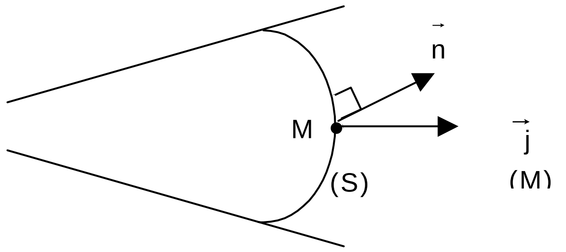
* Pour un matériau conducteur avec plusieurs types de porteurs de charges, on pose :

$$\boxed{\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i}$$

- n_i : densité du porteur i
- q_i : charge du porteur i
- $\vec{v}_i$: vitesse (moyenne) du porteur i

(Ex : semi-conducteur ou solution électrolytique)

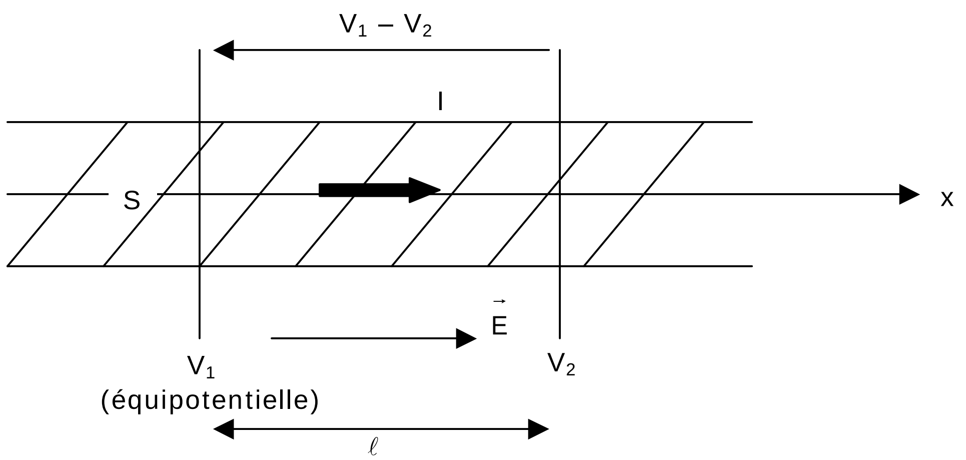
*



$$I = \iint_S \vec{j}(M).dS\,\vec{n}$$

(Flux de $\vec{j}$ à travers (S)).

I.2. Loi d'Ohm



$$\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{\ell}\vec{x}$$

($V_1 > V_2$)

On a : $\begin{cases} \vec{j} = \gamma \vec{E} \\ I = j\,S \\ V_1 - V_2 = E\,\rho \end{cases}$

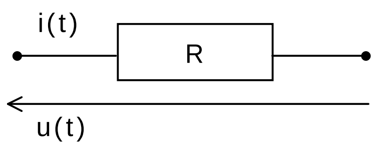
Ainsi : $V_1 - V_2 = \dfrac{j}{\gamma}\,\ell = \left(\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\ell}{S}\right) I$

On voit donc que la différence de potentiel aux bornes d'un cylindre de longueur ℓ et de section S est proportionnelle à l'intensité qui le traverse, ce qui constitue la loi d'Ohm :

$\boxed{V_1 - V_2 = R\,I}$, avec :

$$\boxed{R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S} = \rho\,\frac{\ell}{S}}$$

Généralisation : tout conducteur (cylindrique ou on) dit « ohmique » satisfait à la loi d'Ohm, même en régime non permanent (pourvu que l << λ : ARQP) :



$\boxed{u(t) = R\,i(t)}$

Pour une géométrie non cylindrique, on peut se ramener au cas du cylindre par superposition de résistances élémentaires de « petits cylindres » (cf exercice ? ...).

I.3. **Puissance Joule :** lors de leur mouvement d'ensemble, les électrons subissent des chocs qui « dégagent » une certaine quantité de chaleur : c'est « l'effet Joule ».

Cette énergie dissipée est associée au travail de la force de frottement $\vec{f}$.

La puissance de cette force est :

$$p = \vec{f}\cdot\vec{v} = -\frac{m}{\tau}v^2$$

Il y a n électrons par unité de volume, la puissance volumique « dissipée » par effet Joule est donc :

$$P_{vol} = n\,|p| = n\,\frac{m}{\tau}v^2$$

Ou encore :

$$P_{vol} = \underbrace{(-\,ne\,\vec{v}\,)}_{\vec{j}}.\underbrace{\left(-\frac{m\vec{v}}{\tau\,e}\right)}_{\vec{E}}$$

Soit :

$$\boxed{P_{vol} = \vec{j}.\vec{E} = \gamma\,E^2 = \rho\,j^2}$$

(en Wm^{-3})

Dans un cylindre de longueur ℓ et de section S, la puissance dissipée par effet Joule est donc :

$$P = P_{vol} \times (S\ell)$$

Donc :

$$P = (\rho\,j^2)\,(S\ell) = \rho\left(\frac{I}{S}\right)^2 (S\ell)$$

Soit :

$$\boxed{P = RI^2}$$

On admettra la généralisation :

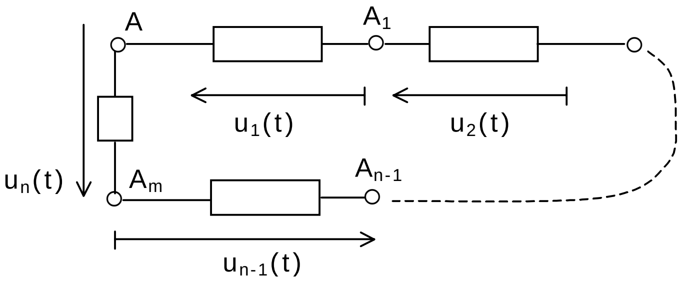
$$\boxed{P(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}}$$

, pour un conducteur ohmique, en régime permanent ou non.

II. *Loi des mailles ; diviseur de tension :*

II.1. **Loi des mailles :** pour un réseau, linéaire ou non, en régime permanent ou non :

$v_A(t) - v_A(t) = 0$, de sorte que :

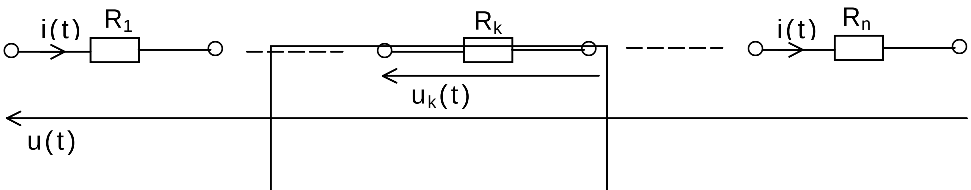


$$O = (v_A - v_{A_1}) + (v_{A_1} - v_{A_2}) + \ldots + (v_{A_{n-1}} - v_{A_n}) + (v_{A_n} - v_A)$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k(t) = 0}$$

II.2. Diviseur de tensions : on considère n conducteurs ohmiques en série :

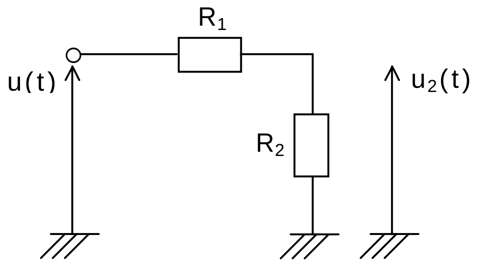


$$\begin{cases} u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \\ u_k(t) = R_k\, i(t) \end{cases}$$

Ainsi :

$$u_k(t) = \left(\frac{R_k}{\sum_{j=1}^{n} R_j} \right) u(t)$$

<u>Cas particulier</u> : n = 2

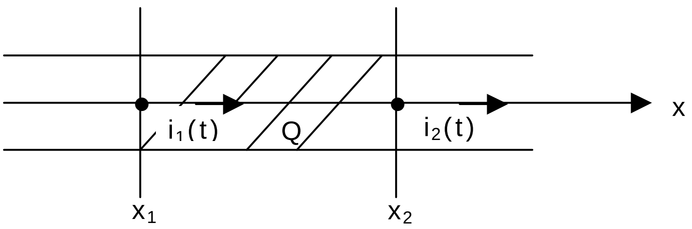


$$\boxed{u_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, u(t)}$$

III. Loi des nœuds ; diviseur de courant ; théorème de Millmann.

III.1. Conservation du flux de $\vec{j}$

Considérons un fil cylindrique en régime permanent ou quasi-permanent (ARQP).



La charge Q située entre x_1 et x_2 ne dépend alors pas du temps.

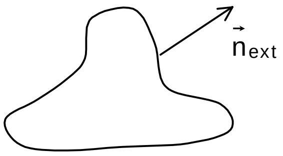
Or : $$\frac{dQ}{dt} = i \text{ « entrant » } - i \text{ « sortant » }$$

$$= i_1 - i_2 = 0$$

Donc : $\underline{i_1(t) = i_2(t)}$: l'intensité i(t) à travers une section quelconque d'un circuit non bifurqué ne dépend pas de cette section : le vecteur $\vec{j}$ est à « flux conservatif », ce qui s'écrit aussi :

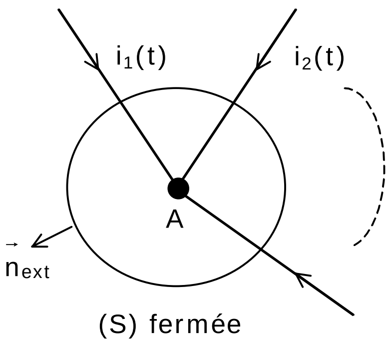
$$\oiint_{(S)} \vec{j}.dS\,\vec{n}_{ext} = I \text{ à travers S fermée}$$

$$= 0$$



(S) fermée

III.2. Loi des nœuds : soit un nœud A où « arrivent n courants $i_k(t)$:



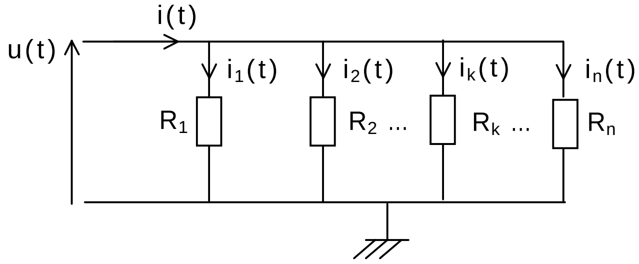
(S) fermée

$- i_1 - i_2 \; --- \; i_n = 0$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0}$$

III.3. Diviseur de courant : soit n résistances en parallèles **:**



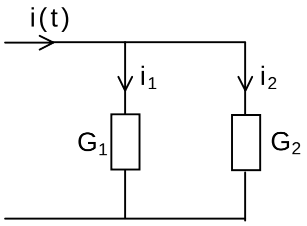
$$\begin{cases} i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t) \quad \text{(loi des nœuds)} \\ i_k(t) = \dfrac{u(t)}{R_k} \end{cases}$$

En introduisant : $\boxed{G_k = \dfrac{1}{R_k}}$, on a :

(conductance, en Ω^{-1} ou S)

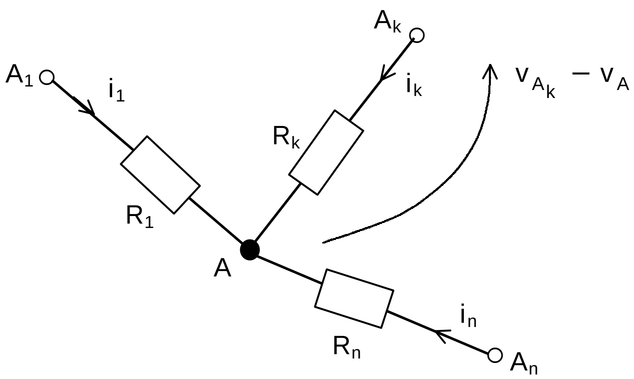
$$\boxed{i_k(t) = \frac{G_k}{\sum\limits_{k'=1}^{n} G_{k'}}\, i(t)}$$

Cas particulier : n = 2



$$\boxed{i_1(t) = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\, i(t)}$$

III.4. Théorème de Millmann : il s'agit de la loi des nœuds en A, exprimée en fonction des potentiels. Ce théorème est très utilisé en électrocinétique et en électronique.



Aux bornes de la résistance R_k, la loi d'Ohm s'écrit :

$$i_k(t) = \frac{v_{A_k}(t) - v_A(t)}{R_k} = G_k\left(v_{A_k}(t) - v_A(t)\right)$$

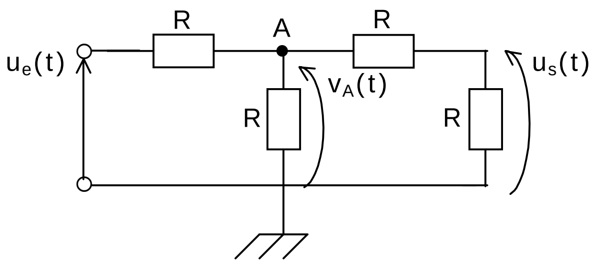
Et la loi des nœuds :

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0 = \sum_{k=1}^{n} G_k\, v_{A_k}(t) - \sum_{k=1}^{n} G_k\, v_A(t)$$

Soit :
$$O = \sum_{k=1}^{n} G_k v_{A_k}(t) - \left(\sum_{k=1}^{n} G_k\right) v_A(t)$$

Ainsi :
$$\boxed{v_A(t) = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k v_{A_k}(t)}{\sum_{k=1}^{n} G_k}}$$

Exemple :



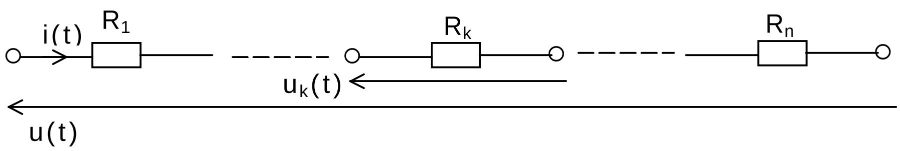
On se propose de calculer $\frac{u_s}{u_e}$

On a :
$$\begin{cases} u_S(t) = \dfrac{R}{R+R} v_A(t) = \dfrac{v_A(t)}{2} & \text{(diviseur de tension)} \\ v_A(t) = \dfrac{\frac{1}{R} u_e(t) + \frac{1}{R} u_s(t) + \frac{1}{R} \times O}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} & \text{(théorème de Millmann)} \end{cases}$$

Ainsi :
$$\begin{cases} u_S = \dfrac{v_A}{2} \\ v_A = \dfrac{u_e + u_s}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{5}}$$

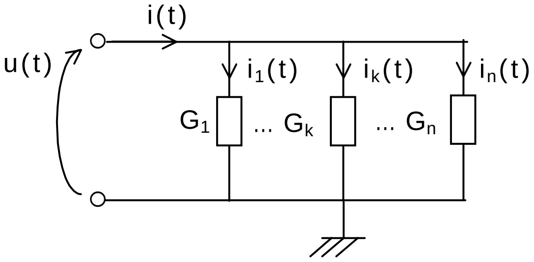
IV. Associations de résistances.

IV.1. En série :



$$\begin{cases} u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \\ u_k(t) = R_k\, i(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{R = \sum_{k=1}^{n} R_k}$$

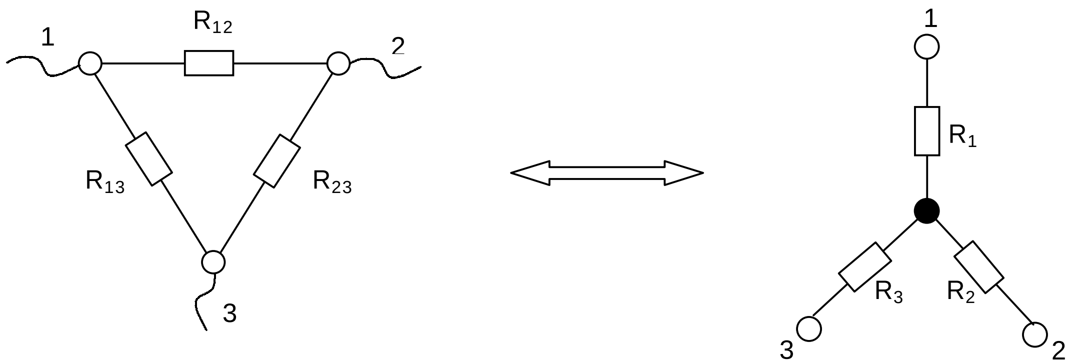
IV.2. En parallèle :



$$\begin{cases} i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t) \\ i_k(t) = G_k\, u(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{G = \sum_{k=1}^{n} G_k}$$

IV.3. En « triangle-étoile » :

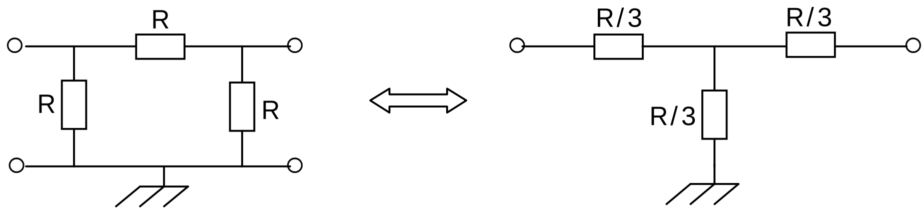
On peut montrer les équivalences suivantes :

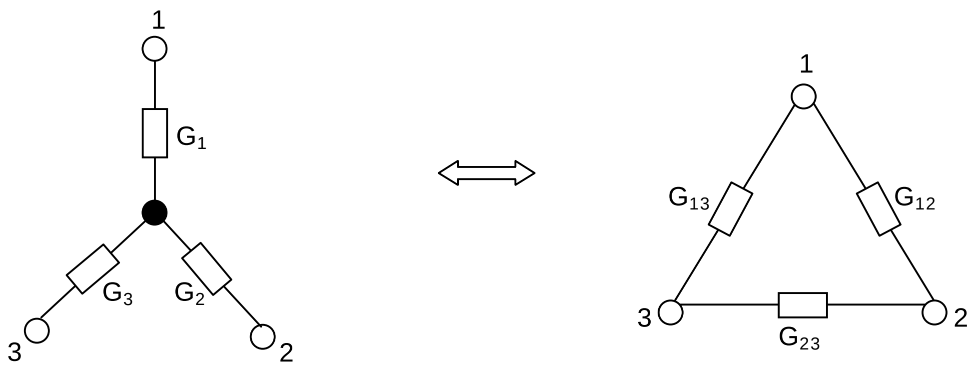
* 

Avec : $$\boxed{R_1 = \frac{R_{12}\, R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}$$

(Et de même pour R_2 et R_3 par permutation circulaire).

<u>Exemple</u> :



* 

Avec :

$$\boxed{G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}}$$

(Et de même pour G_{13} et G_{23} par permutation circulaire).

<u>Exemple</u> :